



# 全短平快

主编 肖德好

## 热点题型突破



## 题型 I 小题·针对练

小题 1	集合与常用逻辑用语、复数	001	小题 14	递推数列与数列应用	014
小题 2	不等式的性质与基本不等式	002	小题 15	空间几何体的表面积与体积	015
小题 3	函数图象与函数解析式	003	小题 16	空间几何体与球的切接问题	016
小题 4	基本初等函数、函数与方程	004	小题 17	空间位置关系	017
小题 5	函数的性质	005	小题 18	立体几何的截面、轨迹与折叠问题	018
小题 6	导数的几何意义	006	小题 19	直线与圆、圆与圆的位置关系	020
小题 7	导数与函数的单调性、极值、最值	007	小题 20	圆锥曲线的概念与基本性质	021
小题 8	导数中的函数构造问题	008	小题 21	离心率	022
小题 9	三角恒等变换	009	小题 22	圆锥曲线的综合问题	024
小题 10	三角函数的图象与性质	010	小题 23	排列组合与二项式定理	026
小题 11	平面向量	011	小题 24	古典概型与事件的独立性	027
小题 12	解三角形	012	小题 25	条件概率与全概率公式	028
小题 13	等差数列、等比数列的基本量与基本性质	013	小题 26	随机变量及其分布	030
			小题 27	统计与成对数据的统计分析	031

## 题型 II 解答·针对练

解答 1	解三角形(一)	033	解答 7	概率与统计(一)	045
解答 2	解三角形(二)	035	解答 8	概率与统计(二)	047
解答 3	立体几何(一)	037	解答 9	圆锥曲线(一)	049
解答 4	立体几何(二)	039	解答 10	圆锥曲线(二)	051
解答 5	数列(一)	041	解答 11	函数与导数(一)	053
解答 6	数列(二)	043	解答 12	函数与导数(二)	055

## 题型 III 压轴·突破练

突破 1	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	057	突破 7	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	063
突破 2	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	058	突破 8	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	064
突破 3	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	059	突破 9	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	065
突破 4	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	060	突破 10	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	066
突破 5	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	061	突破 11	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	067
突破 6	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	062	突破 12	2 选择 + 2 填空 + 1 解答	068

**考卷 I** 小题·标准练

小题 1	“8+3+3” 73 分练	·····	专 01 / 答 57
小题 2	“8+3+3” 73 分练	·····	专 03 / 答 58
小题 3	“8+3+3” 73 分练	·····	专 05 / 答 59
小题 4	“8+3+3” 73 分练	·····	专 07 / 答 60
小题 5	“8+3+3” 73 分练	·····	专 09 / 答 62
小题 6	“8+3+3” 73 分练	·····	专 11 / 答 63
小题 7	“8+3+3” 73 分练	·····	专 13 / 答 65
小题 8	“8+3+3” 73 分练	·····	专 15 / 答 66
小题 9	“8+3+3” 73 分练	·····	专 17 / 答 68
小题 10	“8+3+3” 73 分练	·····	专 19 / 答 69
小题 11	“8+3+3” 73 分练	·····	专 21 / 答 71
小题 12	“8+3+3” 73 分练	·····	专 23 / 答 72

**考卷 II** 解答·标准练

解答 1	“15~17 题” 43 分练	·····	专 25 / 答 74
解答 2	“15~17 题” 43 分练	·····	专 27 / 答 75
解答 3	“15~17 题” 43 分练	·····	专 29 / 答 76
解答 4	“15~17 题” 43 分练	·····	专 31 / 答 76
解答 5	“15~17 题” 43 分练	·····	专 33 / 答 77
解答 6	“15~17 题” 43 分练	·····	专 35 / 答 78
解答 7	“15~17 题” 43 分练	·····	专 37 / 答 79
解答 8	“15~17 题” 43 分练	·····	专 39 / 答 80
解答 9	“15~17 题” 43 分练	·····	专 41 / 答 80
解答 10	“15~17 题” 43 分练	·····	专 43 / 答 81
解答 11	“15~17 题” 43 分练	·····	专 45 / 答 82
解答 12	“15~17 题” 43 分练	·····	专 47 / 答 82
解答 13	“18 题、19 题” 34 分练	·····	专 49 / 答 83
解答 14	“18 题、19 题” 34 分练	·····	专 51 / 答 84
解答 15	“18 题、19 题” 34 分练	·····	专 53 / 答 84
解答 16	“18 题、19 题” 34 分练	·····	专 55 / 答 86

## 小题 1 集合与常用逻辑用语、复数

(时间:30分钟 分值:62分)

### 一、单选题

- [2024·广东梅州一模] 命题“ $\exists x \in (0, +\infty)$ ,  $\ln x = x - 1$ ”的否定是 ( )
  - $\exists x \in (0, +\infty), \ln x \neq x - 1$
  - $\exists x \notin (0, +\infty), \ln x = x - 1$
  - $\forall x \in (0, +\infty), \ln x \neq x - 1$
  - $\forall x \notin (0, +\infty), \ln x = x - 1$
- [2024·西安三模] 若集合  $A = \{x | \sqrt{x} \leq 2\}$ ,  $B = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
  - $\{0, 1\}$
  - $\{-1, 0, 1\}$
  - $\{0, 1, 3\}$
  - $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$
- [2024·山西朔州模拟] 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a < 1$  且  $b < 1$ ”是“ $a + b < 2$ ”的 ( )
  - 充分不必要条件
  - 必要不充分条件
  - 充要条件
  - 既不充分也不必要条件
- [2024·河北邢台二模] 若  $z \cdot (2 + i) = 3 - i^{2027}$ , 则  $z$  的虚部为 ( )
  - 1
  - $\frac{7}{5}$
  - $\frac{1}{5}$
  - $-\frac{1}{5}$
- 如果集合  $S = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbf{N}\}$ ,  $T = \{x | x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$ , 那么 ( )
  - $S \subsetneq T$
  - $T \subseteq S$
  - $S = T$
  - $S \in T$
- 已知  $a$  与  $b$  是非零向量, 且  $a + b \neq 0, a - b \neq 0$ , 则  $|a| = |b|$  是  $a + b$  与  $a - b$  垂直的 ( )
  - 充分不必要条件
  - 必要不充分条件
  - 充要条件
  - 既不充分也不必要条件

- [2024·江苏泰州模拟] 若复数  $z_1, z_2$  满足  $|z_1 - 3i| = 2, |z_2 - 4| = 1$ , 则  $|z_1 - z_2|$  的最大值是 ( )
  - $6 - \sqrt{2}$
  - $6 + \sqrt{2}$
  - 7
  - 8
- [2024·安徽池州二模] 对于数列  $\{a_n\}$ , 若点  $(n, a_n)$  都在函数  $y = cq^x$  ( $c, q$  为非零常数) 的图象上, 其中  $q > 0$  且  $q \neq 1$ , 则“ $q^c > 1$ ”是“ $\{a_n\}$  为递增数列”的 ( )
  - 充要条件
  - 充分不必要条件
  - 必要不充分条件
  - 既不充分也不必要条件

### 二、多选题

- [2024·杭州模拟] 已知集合  $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ ,  $A = \{2, 5, 7, 13\}$ ,  $B = \{3, 7, 13, 17\}$ ,  $C = \{7, 13\}$ , 则下列关系正确的是 ( )
  - $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$
  - $\complement_U (\complement_U A) = \complement_U (\complement_U B)$
  - $A \cap C = B \cap C$
  - $\complement_U (A \cap B) = \complement_U C$
- [2024·福建泉州二模] 设  $z_1, z_2$  是复数, 则 ( )
  - 若  $z_1^2 + z_2^2 = 0$ , 则  $z_1 = z_2 = 0$
  - 若  $z_1^2 = z_2^2$ , 则  $|z_1| = |z_2|$
  - 若  $z_1 z_2 = 0$ , 则  $z_1 = 0$  或  $z_2 = 0$
  - 若  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ , 则  $z_1 z_2 = 0$

### 三、填空题

- [2024·上海长宁区三模] 已知集合  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | x^3 - 3x \leq 1\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
- 设等比数列  $\{a_n\}$  ( $n \geq 1, n \in \mathbf{N}$ ) 的公比为  $q$ , 则“ $12a_2, a_4, 2a_3$  成等差数列”的一个充分不必要条件是\_\_\_\_\_.

题号 答案区

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

## 小题2 不等式的性质与基本不等式

(时间:30分钟 分值:62分)

答题区  
题号

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

### 一、单选题

1. [2024·上海杨浦区二模] 已知实数  $a, b, c, d$  满足  $a > b > 0 > c > d$ , 则下列结论中正确的是 ( )

- A.  $a + d > b + c$       B.  $ad > bc$   
C.  $a + c > b + d$       D.  $ac > bd$

2. [2024·甘肃定西一模]  $x^2 + \frac{7}{x^2} + \sqrt{7}$  的最小值为 ( )

- A.  $2\sqrt{7}$       B.  $3\sqrt{7}$   
C.  $4\sqrt{7}$       D.  $5\sqrt{7}$

3. 已知  $a - b$  的取值范围是  $[0, 1]$ ,  $a + b$  的取值范围是  $[2, 4]$ , 则  $4a - 2b$  的取值范围是 ( )

- A.  $[1, 5]$       B.  $[2, 7]$   
C.  $[1, 6]$       D.  $[0, 9]$

4. [2024·北京西城区期末] 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a > b$ , 则 ( )

- A.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$   
B.  $\tan a > \tan b$   
C.  $3 - a < 2 - b$   
D.  $a|a| > b|b|$

5. [2024·哈尔滨二模] 已知  $ab > 0$ , 则  $\frac{2ab}{a^2 + b^2 + a^2b^2 + 9}$  取得最大值时,  $a + b$  的值为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$   
C.  $-2\sqrt{3}$       D.  $2\sqrt{3}$  或  $-2\sqrt{3}$

6. [2024·安徽模拟] 已知  $m > 0, n > 0$ , 且  $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 2$ , 则  $\frac{n}{2m^2} + \frac{4m}{n^2}$  的最小值为 ( )

- A. 2      B. 4  
C. 8      D.  $2\sqrt{2}$

7. 已知  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , 且  $a < b < c, c \neq d, (a - d)(b - d)(c - d) + c = d$ , 则 ( )

- A.  $d < a$       B.  $a < d < b$   
C.  $b < d < c$       D.  $d > c$

8. [2024·沈阳二模] 设  $\max\{x, y, z\}$  表示  $x, y, z$  中最大的数, 已知  $a, b$  为正实数, 若  $M = \max\{4a,$

$b, \frac{1}{\sqrt{ab}}\}$ , 则  $M$  的最小值为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B. 2  
C. 1      D.  $\sqrt{3}$

### 二、多选题

9. 下列条件能推出  $a > b$  的是 ( )

- A.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , 且  $ab < 0$   
B.  $ac > bc$ , 且  $c > 0$   
C.  $\frac{c}{a - c} > \frac{c}{b - c}$ , 且  $c < 0$   
D.  $\frac{b + c}{a + c} > \frac{b}{a}$ , 且  $a > 0, b > 0$

10. [2024·重庆渝中区模拟] 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + 4y^2 - 2xy = 1$ , 则 ( )

- A.  $x + 2y \leq 1$       B.  $x + 2y \geq -2$   
C.  $x^2 + 4y^2 \leq 2$       D.  $x^2 + 4y^2 \geq 1$

### 三、填空题

11. [2024·石家庄二模] 若实数  $x, y, z \geq 0$ , 且  $x + y + z = 4, 2x - y + z = 5$ , 则  $M = 4x + 3y + 5z$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 在下列关于实数  $a, b$  的四个不等式中, 恒成立的是\_\_\_\_\_. (请填入全部正确的序号)

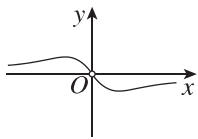
- ①  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ; ②  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ ; ③  $|a| - |b| \leq |a - b|$ ; ④  $a^2 + b^2 \geq 2b - 1$ .

### 小题3 函数图象与函数解析式

(时间:30分钟 分值:62分)

#### 一、单选题

1. [2024·安徽马鞍山三模] 已知函数  $y=f(x)$  的大致图象如图所示, 则  $y=f(x)$  的解析式可能为



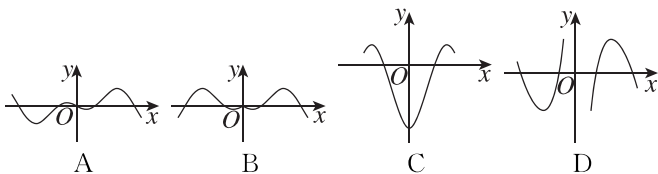
A.  $f(x) = \frac{x \cdot 3^x}{9^x - 1}$

B.  $f(x) = \frac{x \cdot 3^x}{9^x + 1}$

C.  $f(x) = \frac{\ln(|x|+1)}{x^2+1}$

D.  $f(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\ln(|x|+2)}$

2. [2024·河北保定二模] 函数  $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cos 2x$  的部分图象大致为



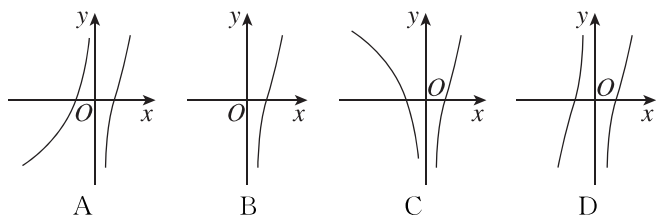
3. 若函数  $f(\cos x) = \cos x + \cos 2x$ , 则  $f[f(\frac{1}{2})] =$

- A. -2
- B. -1
- C. 1
- D. 2

4. [2024·北京昌平区二模] 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x, & x \leq 1, \\ \ln(x-1), & x > 1. \end{cases}$  若对任意的  $x$  都有  $|f(x)| \geq ax$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, 0]$
- B.  $[-4, 0]$
- C.  $[-3, 0]$
- D.  $(-\infty, 2]$

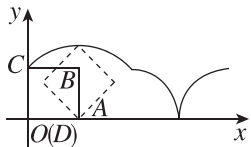
5. [2024·武汉模拟] 函数  $f(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}} - \ln(x^2)$  的图象大致为



6. [2024·成都模拟] 已知  $f(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上的单调函数, 且对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f[f(x) - e^x] = 2 + \ln 2$ , 则  $f(\ln 3) =$

- A.  $3 \ln 2$
- B.  $3 + \ln 2$
- C.  $3 - \ln 2$
- D.  $\ln 3$

7. 如图, 边长为 1 的正方形  $ABCD$ , 其中边  $DA$  在  $x$  轴上, 点  $D$  与坐标原点重合, 正方形沿  $x$  轴正向滚动, 先以  $A$  为中心顺时针旋转, 当  $B$  落在  $x$  轴上时, 再以  $B$  为中心顺时针旋转, 如此继续, 当正方形  $ABCD$  的某个顶点落在  $x$  轴上时, 则以该顶点为中心顺时针旋转. 设顶点  $C(x, y)$  滚动时形成的曲线为  $y=f(x)$ , 则  $f(2023) =$



正方形沿  $x$  轴正向滚动, 先以  $A$  为中心顺时针旋转, 当  $B$  落在  $x$  轴上时, 再以  $B$  为中心顺时针旋转, 如此继续, 当正方形  $ABCD$  的某个顶点落在  $x$  轴上时, 则以该顶点为中心顺时针旋转. 设顶点  $C(x, y)$  滚动时形成的曲线为  $y=f(x)$ , 则  $f(2023) =$

- A. 0
- B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. 1
- D.  $\sqrt{2}$

8. 已知函数  $f(x)$  满足对任意  $x, y \in \mathbf{Z}$ ,  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1$  恒成立, 且  $f(-2) = 1$ , 当  $n \in \mathbf{N}^*$  时,  $f(2n) =$

- A.  $4n+6$
- B.  $8n-1$
- C.  $4n^2+2n-1$
- D.  $8n^2+2n-5$

#### 二、多选题

9. 函数  $f(x), g(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数和偶函数, 且  $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 1$ , 则

- A.  $f(-1) = -1$
- B.  $g(-1) = 2$
- C.  $f(1) + g(1) = 1$
- D.  $f(1) + g(1) = 2$

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x, & x \leq 0, \\ |\log_2 x|, & x > 0, \end{cases}$  若  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 且  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = k$ , 则下列结论正确的是

- A.  $x_1 + x_2 = -1$
- B.  $x_3 x_4 = 1$
- C.  $1 < x_4 < 2$
- D.  $0 < k < 1$

#### 三、填空题

11. 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上可导, 且  $f(2x+3) = 4x^2 - 1$ , 则  $f'(1) =$  \_\_\_\_\_.

12. [2024·济南一模] 已知集合  $A = \{u(x) \mid u(x) = ax^2 - (a+b)x + b, a, b \in \mathbf{R}\}$ , 函数  $f(x) = x^2 - 1$ . 若函数  $g(x)$  满足: 对任意  $u(x) \in A$ , 存在  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , 使得  $u(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ , 则  $g(x)$  的解析式可以是 \_\_\_\_\_ (写出一个满足条件的函数解析式即可)

## 小题 4 基本初等函数、函数与方程

(时间:30分钟 分值:62分)

### 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = \frac{\lg(x-3)}{\sqrt{25-x^2}}$ , 则下列结论正确的是 ( )
- A.  $f(x)$  的定义域为  $(-5, 5)$   
 B.  $f(x)$  的定义域为  $[-5, 5]$   
 C.  $f(x)$  的定义域为  $(3, 5)$   
 D.  $f(x)$  的定义域为  $[3, 5]$
2. [2024·陕西安康模拟] 函数  $f(x) = \ln x + x^2 - 2$  的零点所在区间是 ( )
- A.  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$       B.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$   
 C.  $(1, \sqrt{2})$       D.  $(\sqrt{2}, 2)$
3. [2024·杭州模拟] 若  $x_1 + 2^{x_1} = 4, x_2 + \log_2 x_2 = 4$ , 则  $x_1 + x_2 =$  ( )
- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5
4. 方程  $\lg x - |\sin 2x| = 0$  在  $(0, 3\pi)$  内的实数根的个数为 ( )
- A. 11      B. 10  
 C. 9      D. 8
5. [2024·合肥模拟] 若  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则“ $2^x - 2^y > (\frac{1}{2})^x - (\frac{1}{2})^y$ ”是“ $\ln(x-y) > 0$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件
6. [2024·长沙三模] 地震震级通常是用来衡量地震释放能量大小的数值, 其计算基于地震波的振幅, 计算公式为  $M = \lg A - \lg A_0$ , 其中  $M$  表示某地地震的里氏震级,  $A$  表示该地地震台测振仪记录的地震波的最大振幅,  $A_0$  表示这次地震的标准地震振幅. 假设在一次地震中, 某地地震台测振仪记录的地震波的最大振幅为 5000, 且这次地震的标准地震振幅为 0.002, 则该地这次地震约为(参考数据:  $\lg 2 \approx 0.3$ ) ( )
- A. 里氏 6.3 级地震      B. 里氏 6.4 级地震  
 C. 里氏 7.4 级地震      D. 里氏 7.6 级地震

7. [2025·四川内江模拟] 设  $a = 0.1e^{0.2}, b = \frac{1}{10}, c = 0.2e^{0.1}$ , 则下列选项正确的是 ( )
- A.  $c < b < a$       B.  $b < a < c$   
 C.  $b < c < a$       D.  $a < c < b$
8. [2024·南昌二模] 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = f(-x) = -f(x)$ , 当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) = \log_2(x+1)$ . 若  $f(a+1) > f(a)$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )
- A.  $(-\frac{5}{2} + 4k, -\frac{3}{2} + 4k), k \in \mathbf{Z}$   
 B.  $(-1 + 4k, 4k), k \in \mathbf{Z}$   
 C.  $(-\frac{1}{2} + 4k, \frac{1}{2} + 4k), k \in \mathbf{Z}$   
 D.  $(-\frac{3}{2} + 4k, \frac{1}{2} + 4k), k \in \mathbf{Z}$

### 二、多选题

9. [2024·郑州三模] 已知函数  $f(x) = \lg(1-x)$ , 则 ( )
- A.  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 1)$   
 B.  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$   
 C.  $f(-1) + f(-4) = 1$   
 D.  $y = f(x^2)$  的单调递增区间为  $(0, 1)$
10. 已知函数  $y = x + e^x$  的零点为  $x_1, y = x + \ln x$  的零点为  $x_2$ , 则 ( )
- A.  $x_1 + x_2 > 0$   
 B.  $x_1 x_2 < 0$   
 C.  $e^{x_1} + \ln x_2 = 0$   
 D.  $x_1 x_2 + x_1 - x_2 > 1$

### 三、填空题

11. [2024·北京大兴区三模] 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ 4^x, & x \geq 0, \end{cases}$  若  $f(m) = 8$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.
12. [2024·武汉二模] 已知函数  $f(x) = \log_2(4^x + 2^{x+1} + 1) - x$ , 若  $f(2a-1) < f(a+3)$ , 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

## 小题 5 函数的性质

(时间:30 分钟 分值:62 分)

### 一、单选题

1. 下列函数中,在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ( )
- A.  $f(x) = -\ln x$       B.  $f(x) = |x-1|$
- C.  $f(x) = \frac{1}{2^x}$       D.  $f(x) = -\frac{1}{x}$
2. 已知函数  $f(x)$  在定义域  $(-1, 3)$  上单调递增,且  $f(2a-1) < f(2-a)$ ,则实数  $a$  的取值范围是 ( )
- A.  $(1, 2)$       B.  $(-\infty, 1)$
- C.  $(0, 1)$       D.  $(1, +\infty)$
3. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,则“ $b = -1$ ”是“函数  $f(x) = \frac{a^x}{b} + \frac{b}{a^x}$  为偶函数”的 ( )
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件
4. [2024 · 江西景德镇三模] 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x < 0, \\ g(x), & x > 0 \end{cases}$  是奇函数,则当  $x > 0$  时, $g(x)$  的解析式为 ( )
- A.  $-(\frac{1}{2})^x$       B.  $(\frac{1}{2})^x$
- C.  $-2^x$       D.  $2^x$
5. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(1-x) = f(x+1)$ ,且  $y = f(x+2)$  为奇函数.当  $x \in (2, 3]$  时, $f(x) = (x-2)^3 - 3(x-2)$ ,则  $f(2023) =$  ( )
- A.  $-5$       B.  $-2$
- C.  $-1$       D.  $1$
6. 已知函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的偶函数,且当  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ,  $x_1 \neq x_2$  时,  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ,若  $a = f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$ ,  $b = f(\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $c = f(\sin 1)$ ,则下列选项正确的是 ( )
- A.  $c < b < a$       B.  $b < c < a$
- C.  $a < b < c$       D.  $c < a < b$

7. [2024 · 上海黄浦区二模] 设函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + 20, & -4 \leq x \leq 0, \\ ax^2 - 2x + 3, & 0 < x \leq 4, \end{cases}$  若  $f(x) > 0$  恒成立,则实数  $a$  的取值范围是 ( )
- A.  $(1, +\infty)$       B.  $(0, \frac{1}{3})$
- C.  $(\frac{5}{16}, 1)$       D.  $(\frac{1}{3}, 1)$
8. 已知函数  $f(x), g(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ ,函数  $f(2x-1)+1$  的图象关于原点对称,函数  $g(x+1)$  的图象关于  $y$  轴对称,  $f(x+2) + g(x+1) = -1$ ,  $f(-4) = 0$ ,则  $f(2030) - g(2017) =$  ( )
- A.  $-4$       B.  $-3$
- C.  $3$       D.  $4$

### 二、多选题

9. 已知函数  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ ,则 ( )
- A.  $f(x)$  为奇函数
- B.  $f(x)$  在定义域内单调递减
- C.  $f(x)$  有 2 个零点
- D.  $f(x)$  的最小值为  $\sqrt{2}$
10. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(2+x) - f(2-x) = 2x$ ,且函数  $f(2x+1)$  的图象关于点  $(0, 3)$  对称,则下列说法正确的是 ( )
- A. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 3)$  对称
- B. 4 是函数  $f(x)$  的一个周期
- C.  $f(2023) = 2025$
- D.  $\sum_{i=0}^{99} f(i) = 5150$

### 三、填空题

11. [2024 · 成都三模] 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,且当  $x > 0$  时,  $f(x) = x(1 - \ln x)$ ,则当  $x < 0$  时,  $f(x)$  的单调递增区间为 \_\_\_\_\_.
12. [2024 · 西安三模] 已知函数  $f(x) = \frac{2}{e^x + 1} + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ,若  $f(a-1) + f(2a^2) > 2$ ,则  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



## 小题6 导数的几何意义

(时间:30分钟 分值:62分)

答题区

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

### 一、单选题

1. 抛物线  $x^2=4y$  在点(2,1)处的切线的斜率为 ( )

A. -1                      B.  $-\frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1

2. [2024·浙江绍兴二模] 函数  $f(x)=x+a\ln x$  的图象在点(1,1)处的切线与直线  $y=2x$  平行,则  $a=$  ( )

A. 1                          B. 2

C. -1                        D. -2

3. [2024·哈尔滨二模] 函数  $f(x)=|x^3|+1$  的图象在  $x=-1$  处的切线方程为 ( )

A.  $y=4x+6$

B.  $y=-2x+6$

C.  $y=-3x-3$

D.  $y=-3x-1$

4. 已知函数  $f(x)=ae^x+x(a>0)$  的图象在点(0,  $f(0)$ )处的切线为直线  $l$ ,若直线  $l$  与两坐标轴围成的三角形的面积为  $\frac{2}{3}$ ,则  $a=$  ( )

A.  $\frac{1}{2}$                         B. 1

C. 2                          D.  $\frac{2}{3}$

5. [2024·河南信阳模拟] 已知动点  $P$  在函数  $f(x)=-\sqrt{x}(x+1)(x>0)$  的图象上,则以点  $P$  为切点的切线的倾斜角的取值范围是 ( )

A.  $[0, \frac{\pi}{4}]$                       B.  $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$

C.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$                       D.  $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$

6. [2024·福州模拟] 已知函数  $f(x)$  是偶函数,当  $x>0$  时,  $f(x)=x^3+2x$ ,则曲线  $y=f(x)$  在  $x=-1$  处的切线方程为 ( )

A.  $y=-5x-2$                       B.  $y=-5x-8$

C.  $y=5x+2$                       D.  $y=5x+8$

7. 若函数  $f(x)=x^2+3x-4\ln x$ ,点  $P$  是曲线  $y=f(x)$  上任意一点,则点  $P$  到直线  $l:x-y-3=0$  的距离的最小值为 ( )

A.  $4\sqrt{2}$

B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C.  $3\sqrt{2}$

D.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. [2024·广东茂名一模] 已知曲线  $y=\ln x$  与曲线  $y=x^2+2ax$  有公切线,则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

B.  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

C.  $(-\infty, \frac{1}{2}]$

D.  $[\frac{1}{2}, +\infty)$

### 二、多选题

9. 已知直线  $l$  与函数  $f(x)=\ln x+x^2$  的图象相切,则下列直线中可能与直线  $l$  平行的是 ( )

A.  $3x-y-1=0$

B.  $2x-y+1=0$

C.  $4x-y+1=0$

D.  $5x-y+3=0$

10. 过点  $P(a,b)$  作直线  $l$  与函数  $f(x)=-2x^3$  的图象相切,则 ( )

A. 若点  $P$  与原点重合,则直线  $l$  的方程为  $y=0$

B. 若直线  $l$  与直线  $x-6y=0$  垂直,则  $6a+b=4$

C. 若点  $P$  在  $f(x)$  的图象上,则符合条件的直线  $l$  只有 1 条

D. 若符合条件的直线  $l$  有 3 条,则  $\frac{a^3}{b} < -\frac{1}{2}$

### 三、填空题

11. 已知函数  $f(x)=4e^x-2x+2$ ,则曲线  $y=f(x)$  在  $x=0$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

12. [2024·成都模拟] 已知函数  $f(x)=\sqrt{x}$  的图象与函数  $g(x)=a^x(a>0$  且  $a\neq 1)$  的图象在公共点处有相同的切线,则公共点的坐标为\_\_\_\_\_.

## 小题7 导数与函数的单调性、极值、最值

(时间:30分钟 分值:62分)

班级

姓名

题号 答题区

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

### 一、单选题

- [2024·西安模拟] 函数  $f(x) = (x^2 - 8)e^x$  的极小值点为 ( )  
 A. 2  
 B.  $-4e^2$   
 C.  $-4$   
 D.  $8e^{-4}$
- 函数  $f(x) = \cos x + (x+1)\sin x + 1$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的最大值为 ( )  
 A.  $-\frac{\pi}{2}$   
 B. 2  
 C.  $-\frac{3\pi}{2}$   
 D.  $\frac{\pi}{2} + 2$
- 已知函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x) = (x-1)(x^2 - 3x + a)$ , 若 1 不是函数  $f(x)$  的极值点, 则实数  $a$  的值为 ( )  
 A.  $-1$   
 B. 0  
 C. 1  
 D. 2
- 已知函数  $f(x) = e^x - a \ln x$  在区间  $(1, 2)$  上单调递增, 则  $a$  的最大值为 ( )  
 A. 1  
 B.  $e$   
 C.  $e^2$   
 D.  $2e^2$
- [2024·沈阳三模] 已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax + 1$ , 则“ $a < 2$ ”是“ $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增”的 ( )  
 A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件
- [2024·郑州模拟] 已知函数  $f(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x, a > 0$ , 若函数  $f(x)$  没有零点, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
 A.  $(1, +\infty)$   
 B.  $(2, +\infty)$   
 C.  $(\frac{1}{2}, 3)$   
 D.  $(1, 3)$
- 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x) = e^x - e^{-x}$ , 设  $a = 2^{0.7} \cdot f(2^{0.7}), b = (\frac{1}{2})^{-0.8} \cdot f[(\frac{1}{2})^{-0.8}], c = -\log_{0.7} 1.25 \cdot f(\log_{0.7} 0.8)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )

A.  $b > a > c$                       B.  $c > a > b$

C.  $b > c > a$                       D.  $c > b > a$

- [2024·福建莆田三模] 已知  $a > 1$ , 点  $P$  在曲线  $y = e^{ax}$  上, 点  $Q$  在曲线  $y = \frac{1}{a} \ln x$  上, 则  $|PQ|$  的最小值是 ( )

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$                               B.  $\sqrt{2}a$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2a}(1 + \ln a)$                   D.  $\frac{\sqrt{2}}{a}(\ln a + 1)$

### 二、多选题

- [2024·山西大同期末] 已知函数  $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$ , 记  $f(x)$  的极小值点为  $x_1$ , 极大值点为  $x_2$ , 则 ( )  
 A.  $x_1 + x_2 = 3$   
 B.  $x_1 < x_2$   
 C.  $f(x_1) + f(x_2) = -3 \ln 2$   
 D.  $f(x_1) < f(x_2)$
- 已知函数  $f(x) = x^2 - 2a \ln x - 1$ , 则 ( )  
 A. 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = 2x - 2$ , 则  $a = 2$   
 B. 若  $a = 1$ , 则函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(1, +\infty)$   
 C. 若  $a > 0$ , 则函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上的最小值为  $a^2 - 2a \ln a - 1$   
 D. 若  $x \in [1, +\infty), f(x) \geq 0$ , 则  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$

### 三、填空题

- 已知函数  $f(x) = x^2 + (x-2)e^x - 2x + 5$  在区间  $(3m-1, m+2)$  上不单调, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
- [2024·浙江绍兴期末] 设函数  $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x - b (a, b \in \mathbf{R})$  在  $x = x_1, x = x_2$  处取得极值, 且  $x_2 - x_1 = 2$ , 当  $x \in [0, 2]$  时,  $|f(x)|$  的最大值记为  $M$ , 则  $M$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

## 小题 8 导数中的函数构造问题

(时间:30 分钟 分值:62 分)

题号

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

### 一、单选题

- 若对任意的  $x_1, x_2 \in (1, 3]$ , 当  $x_1 < x_2$  时,  $x_1 - x_2 > \frac{a}{2} \ln x_1 - \frac{a}{2} \ln x_2$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )
  - $[3, +\infty)$
  - $(3, +\infty)$
  - $[6, +\infty)$
  - $(6, +\infty)$
- [2024 · 湖北襄阳模拟] 定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 若  $xf'(x) - f(x) < 0$ , 且  $f(2) = 0$ , 则不等式  $(x-1)f(x) > 0$  的解集为 ( )
  - $(0, 2)$
  - $(1, 2)$
  - $(0, 1)$
  - $(2, +\infty)$
- 设  $a, b$  都为正数,  $e$  为自然对数的底数, 若  $ae^a < b \ln b$ , 则 ( )
  - $ab > e$
  - $b > e^a$
  - $ab < e$
  - $b < e^a$
- 已知  $a \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{N}^*, a < b$ , 则满足方程  $a^b = b^a$  的  $(a, b)$  有 ( )
  - 0 组
  - 1 组
  - 2 组
  - 无穷多组
- [2024 · 长春模拟] 已知  $a = e^{0.1} - 1, b = \frac{2}{21}, c = \ln 1.1$ , 则 ( )
  - $b < a < c$
  - $c < a < b$
  - $c < b < a$
  - $b < c < a$
- 已知  $b > a > 0$ , 且满足  $a \ln b = b \ln a$ ,  $e$  为自然对数的底数, 则 ( )
  - $a^e < e^a < e^b$
  - $e^b < a^e < e^a$
  - $e^b < e^a < a^e$
  - $e^a < a^e < e^b$
- [2024 · 陕西安康模拟] 若存在  $x \in (0, +\infty)$ , 使得不等式  $a^2 x^4 + x \geq e^{ax^2} + (\ln x)^2$  成立, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )
  - $[\frac{1}{2e}, +\infty)$
  - $[\frac{1}{e}, +\infty)$
  - $(-\infty, \frac{1}{e}]$
  - $(-\infty, \frac{1}{2e}]$

- [2024 · 河北保定期末] 已知函数  $f(x) = e^x + a \ln \frac{1}{ax+a} - a (a > 0)$ , 若  $f(x) > 0$  恒成立, 则  $a$  的取值范围是 ( )
  - $(0, 1)$
  - $(1, +\infty)$
  - $[1, +\infty)$
  - $(0, 1]$

### 二、多选题

- [2024 · 辽宁抚顺三模] 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  的图象是连续不断的, 函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 当  $x > 0$  时,  $f'(x) \cos x > f(x) \sin x + e \cdot f'(x)$ , 其中  $e$  为自然对数的底数, 则 ( )
  - $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为减函数
  - 当  $x > 0$  时,  $f(x) < 0$
  - $f(\frac{\pi}{2}) > f(\frac{3\pi}{2})$
  - $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有且只有 1 个零点
- [2024 · 武汉二模] 已知  $x > y > 0$ , 则下列不等式正确的有 ( )
  - $e^x - e^y > x - y$
  - $\ln x - \ln y > x - y$
  - $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$
  - $\frac{e^x}{y} > \frac{e^y}{x}$

### 三、填空题

- [2024 · 合肥模拟] 若关于  $x$  的方程  $m + e \ln m = \frac{x}{e^x} + e(\ln x - x)$  有解, 则实数  $m$  的最大值为 \_\_\_\_\_.
- [2024 · 郑州模拟] 若不等式  $ae^{ax-1} \geq 1 + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

### 解答 1 解三角形 (一)

(时间:35 分钟 分值:56 分)

解答题(本大题共 4 小题,共 56 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 在  $\triangle ABC$  中,已知内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ ,且  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ .

(1)求角  $B$ ;

(2)若  $\angle ABC$  的平分线交  $AC$  于点  $D, b=2, BD=\sqrt{3}$ ,求  $\triangle ABC$  的周长.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

2. 在  $\triangle ABC$  中,已知内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ ,且  $a=\sqrt{3}, 2a \cos A = c \cos B + b \cos C$ .

(1)求  $\triangle ABC$  的外接圆的半径;

(2)求  $\triangle ABC$  的周长的取值范围.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ ,且 $c \sin \frac{A+C}{2} = b \sin C$ .

(1)求角 $B$ ;

(2)若 $D$ 是 $AC$ 边的中点, $b=2$ ,求线段 $BD$ 的长的最大值.

(本小题满分15分)

答 题 区 域

4. 在锐角三角形 $ABC$ 中,已知内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ ,且 $c \cos A + c = \sqrt{3} a \sin C$ .

(1)求角 $A$ ;

(2)若 $a = \sqrt{3}$ ,求 $2b + c$ 的最大值.

(本小题满分15分)

答 题 区 域

## 解答2 解三角形(二)

(时间:35分钟 分值:56分)

解答题(本大题共4小题,共56分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. [2024·四川南充二模] 在① $2c\sin B\cos A=b(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$ ;② $\sin^2 B+\sin^2 C+\cos^2 A-1=\sin(A+B)\sin(A+C)$ ;③ $\frac{b\sin B+c\sin C-a\sin A}{c\sin B}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A$ 这三个条件中任选一个,将序号补充在下面的问题中,并解答问题.如果选择多个条件分别解答,则按第一个解答计分.

已知内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ ,且满足\_\_\_\_\_.

(1)求 $A$ ;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $16\sqrt{3}$ , $D$ 为 $AC$ 的中点,求线段 $BD$ 的长的最小值.

(本小题满分13分)

答 题 区 域

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ , $\mathbf{m}=(\sin A-\sin C, \sin A-\sin B)$ , $\mathbf{n}=(a+b, c)$ ,且 $\mathbf{m}\parallel\mathbf{n}$ .

(1)求角 $B$ ;

(2)若点 $D$ 满足 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$ , $AD=BD$ ,证明: $c=2a$ .

(本小题满分13分)

答 题 区 域

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ ,且 $c=2a$ .

(1)若 $\cos B = \frac{4}{5}$ ,求 $\tan A$ ;

(2)若 $b=2$ ,求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

(本小题满分15分)

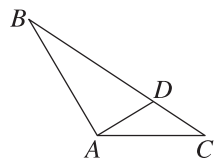
答 题 区 域

4. 如图所示,在 $\triangle ABC$ 中,已知内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ ,且 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ , $c=2$ ,点 $D$ 在边 $BC$ 上, $AD=1$ .

(1)若 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,求 $b$ ;

(2)若 $BD=2DC$ ,求 $\triangle ABC$ 的面积.

(本小题满分15分)



答 题 区 域

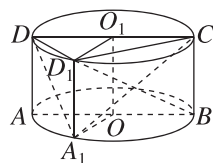


突破 1 2 选择 + 2 填空 + 1 解答

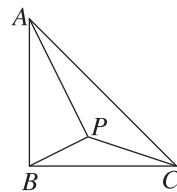
(时间:35 分钟 分值:38 分)

1. [2024 · 浙江温州三模] 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_{n+1} = \frac{S_n}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则  $\sum_{i=1}^5 a_{2i} - \sum_{j=1}^6 a_{2j-1}$  可以等于 ( )
- A. 18    B. 12  
C. 9    D. 6

2. (多选题)[2024 · 湖南岳阳三模] 如图, 四边形  $ABCD$  是圆柱  $OO_1$  的轴截面且面积为 2, 四边形  $OO_1DA$  绕  $OO_1$  逆时针旋转角  $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$  到四边形  $OO_1D_1A_1$  的位置, 则 ( )
- A. 圆柱  $OO_1$  的侧面积为  $2\pi$   
B. 当  $0 < \theta < \pi$  时,  $DD_1 \perp A_1C$   
C. 当  $0 < \theta < \pi$  时, 四面体  $CDD_1A_1$  的外接球的表面积的最小值为  $3\pi$   
D. 当  $BD_1 = \sqrt{2}$  时,  $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$



3. [2024 · 四川南充一模] 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = BC = 1$ ,  $P$  为  $\triangle ABC$  内一点, 且  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_.



4. [2024 · 广西桂林三模] 若  $\frac{x^k - e^x}{e^x} \geq 2(k \ln x - x) (k > 0)$  对任意的  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 则  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

5. [2024 · 哈尔滨模拟] 已知  $M(-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $N(\frac{1}{2}, 0)$ , 平面内动点  $P$  满足  $\vec{MP} \cdot \vec{MN} = |\vec{NP}|$ .

- (1) 求动点  $P$  的轨迹  $C$  的方程;  
(2) 动直线  $l$  交曲线  $C$  于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 直线  $OA$  和  $OB$  的倾斜角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ , 若  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ , 求证直线  $l$  过定点, 并求出该定点坐标;  
(3) 设(2)中定点为  $Q$ , 记  $\triangle OQA$  与  $\triangle OQB$  的面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ , 求  $S_1 S_2$  的取值范围.

(本小题满分 17 分)

答 题 区 域







## 突破 4 2 选择+2 填空+1 解答

(时间:35 分钟 分值:38 分)

1. [2024·长沙一模] 已知实数  $a, b$  分别满足  $e^a = 1.02, \ln(b+1) = 0.02$ , 且  $c = \frac{1}{51}$ , 则 ( )
 

A.  $a < b < c$ 
B.  $b < a < c$

C.  $b < c < a$ 
D.  $c < a < b$
2. (多选题)[2024·山东菏泽模拟] 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2$ ,  $f(1) = 2, f(x+1)$  为偶函数, 则 ( )
 

A.  $f(3) = 2$ 
B.  $f(x)$  为奇函数

C.  $f(2) = 0$ 
D.  $\sum_{k=1}^{2024} f(k) = 0$
3. 已知圆  $C: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$ , 点  $A(3, 5)$ , 点  $B$  为圆  $C$  上的一个动点(异于点  $A$ ), 若点  $P$  在以  $AB$  为直径的圆上, 则  $P$  到  $x$  轴距离的最大值为\_\_\_\_\_.
4. [2024·贵州毕节三模] 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  是线段  $BC_1$  上的一个动点, 记异面直线  $DP$  与  $A_1B_1$  所成的角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta$  的最小值为\_\_\_\_\_.
5. [2024·哈尔滨模拟] 2024 年年初, “冰城”哈尔滨充分利用得天独厚的冰雪资源, 成为 2024 年第一个“火出圈”的网红城市, “冰城”通过创新营销展示了丰富的文化活动, 成功提升了吸引力和知名度, 为其他旅游城市提供了宝贵经验. 2024 年 1 月 1 日至 1 月 5 日, 哈尔滨接待外地游客的数量如下:

日期 $x$ (日)	1	2	3	4	5
游客数量 $y$ (万人次)	45	50	60	65	80

- (1) 计算  $x, y$  的样本相关系数  $r$  (计算结果精确到 0.01), 并判断是否可以认为日期与游客数量的相关程度很强.
- (2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出  $y$  关于  $x$  的经验回归方程.
- (3) 为了吸引游客, 在冰雪大世界售票处针对各个旅游团进行了现场抽奖的活动, 具体抽奖规则为: 从该旅游团中随机同时抽取 2 名游客, 2 名游客性别不同则为中奖. 已知某个旅游团中有 5 名男游客和  $k (k \geq 5)$  名女游客, 设重复进行三次抽奖(各次抽奖结果互不影响)中恰有一次中奖的概率为  $P$ , 则当  $k$  取多少时,  $P$  最大?

参考公式:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ ,  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ .

参考数据:  $\sqrt{3} \approx 1.732$ .

(本小题满分 17 分)

答 题 区 域